

Princípio de Indução

Como provar que a soma dos primeiros n números naturais é $\frac{1}{2}n(n+1)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$?

Teorema 1.1.14 (Princípio de indução)

Sejam $k \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$ e S um subconjunto de $\mathbb{N}_k$ tal que:

(i) $k \in S$;

(ii) Para qualquer $n \in \mathbb{N}_k$, se $n \in S$ então $n+1 \in S$.

Então, $S = \mathbb{N}_k$.

↓ Reformulando

Princípio de indução)

Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $\Phi(n)$ uma condição, com $n \in \mathbb{N}_k$, tal que:

① $\Phi(k)$ é uma proposição verdadeira;

② $\forall n \in \mathbb{N}_k, \Phi(n) \implies \Phi(n+1)$ é uma proposição verdadeira.

Então,

$$(\forall n \in \mathbb{N}_k) \Phi(n)$$

é uma proposição verdadeira.

Teorema 1.1.16 (Princípio de indução completa) (Segundo princípio de indução)

Sejam $k \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\}$ e S um subconjunto de $\mathbb{N}_k$ tal que:

(i) $k \in S$;

(ii) Para qualquer $n \in \mathbb{N}_k$, se $t \in S$, para todo o $t \in \{k, \dots, n\}$, então $n+1 \in S$

(i.e. $(\forall n \in \mathbb{N}_k) [(\forall t \in \{k, \dots, n\}) t \in S] \implies n+1 \in S$).

Então, $S = \mathbb{N}_k$.

↓ Reformulando

Princípio de Indução completa (Segundo princípio de indução)

Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $\Phi(n)$ uma condição, com $n \in \mathbb{N}_k$, tal que:

- ① $\Phi(k)$ é uma proposição verdadeira;
- ② $\forall n \in \mathbb{N}_k, [(\forall k \leq t \leq n) \Phi(t)] \implies \Phi(n+1)$ é uma proposição verdadeira.

Então,

$$(\forall n \in \mathbb{N}_k) \Phi(n)$$

é uma proposição verdadeira.

Número de elementos de $P(X)$

Dado um conjunto finito X , denotamos por

$$|X|$$

o número de elementos (cardinal) de X .

Teorema 1.1.17

Seja X um conjunto com n elementos ($n \in \mathbb{N}_0$). Então,

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^n.$$

Dem:

Pretende-se mostrar que para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$,

“Se um conjunto tem n elementos então o conjunto das suas partes tem 2^n elementos”.

Efectua-se a demonstração por indução em n .

(1) Para $n=0$ tem-se $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ e portanto $|\mathcal{P}(X)| = 1 = 2^0$.

(2) Suponha-se agora que todo o conjunto Y com n elementos tem $|\mathcal{P}(Y)| = 2^n$, e mostre-se que se X tem $n+1$ elementos então $|\mathcal{P}(X)| = 2^{n+1}$.

Ora, se X tem n elementos então

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}.$$

Sendo $Y = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, tem-se que

$$|Y| = n,$$

pelo que por hipótese de indução, $|\mathcal{P}(Y)| = 2^n$.

É fácil constatar que

$$\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(Y) \cup \{Z \cup \{x_{n+1}\} : Z \in \mathcal{P}(Y)\}$$

e como

$$\mathcal{P}(Y) \cap \{Z \cup \{x_{n+1}\} : Z \in \mathcal{P}(Y)\} = \emptyset$$

então

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(X)| &= |\mathcal{P}(Y)| + |\{Z \cup \{x_{n+1}\} : Z \in \mathcal{P}(Y)\}| \\ &= 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}, \end{aligned}$$

provando-se o pretendido.

Conclusão: (1) e (2) permitem então afirmar o enunciado do teorema.